

Convergenza uniforme. Interpretazione geometrica della differenziabilità

CONVERGENZA UNIFORME DI FAMIGLIE DI FUNZIONI

Definizione 1. Sia Ω un insieme in \mathbb{R}^d e $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione limitata. Definiamo

$$\|G\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |G(x)|.$$

Definizione 2 (Convergenza uniforme e convergenza puntuale). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme dato e $F_r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una famiglia di funzioni limitate che dipende dal parametro $r > 0$. Sia $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione limitata su Ω .

- Diciamo che F_r **converge uniformemente** alla funzione $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \|F_r - G\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

- Diciamo che F_r **converge puntualmente** alla funzione $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ se

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_r(X) = G(X) \quad \text{per ogni } X \in \Omega.$$

Osservazione 3 (Convergenza uniforme \Rightarrow convergenza puntuale). Se F_r converge uniformemente a G su Ω , allora F_r converge puntualmente a G . Infatti, per ogni $X \in \Omega$, abbiamo

$$\lim_{r \rightarrow 0} |F_r(X) - G(X)| \leq \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sup_{Y \in \Omega} |F_r(Y) - G(Y)| \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \|F_r - G\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

Esempio 4. La sola convergenza puntuale di una famiglia di funzioni $F_r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ non implica la sua convergenza uniforme. Infatti, se prendiamo come insieme Ω l'intervallo $[0, 1]$, e come F_r le funzioni

$$F_r(x) := \begin{cases} \frac{x}{r} & \text{se } x \in [0, r], \\ \frac{2r-x}{r} & \text{se } x \in [r, 2r], \\ 0 & \text{se } x \in [2r, 1], \end{cases}$$

allora, per ogni $x \in [0, 1]$, abbiamo che

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_r(x) = 0,$$

ovvero la famiglia F_r converge puntualmente alla funzione costante

$$G(x) \equiv 0 \quad \text{per ogni } x \in [0, 1].$$

D'altra parte F_r non converge uniformemente a G . Infatti, per ogni $r > 0$ si ha

$$\|F_r - G\|_{L^\infty([0,1])} = \sup_{x \in [0,1]} |F_r(x)| = |F_r(r)| = 1.$$

Esempio 5. La famiglia di funzioni

$$F_r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_r(x) = r + x^2,$$

converge uniformemente alla funzione $G(x) = x^2$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

Esempio 6. La famiglia di funzioni

$$F_r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_r(x) = (x - r)^2,$$

converge uniformemente alla funzione $G(x) = x^2$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizi sulla convergenza uniforme

Esercizio 7. Studiare il comportamento e (se esiste) trovare il limite uniforme, per $r \rightarrow 0$, delle seguenti famiglie di funzioni:

(1) $F_r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \sqrt{1 + r^2 x^2}$;

(2) $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \frac{x}{1 + r^2 x^2}$;

(3) $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \frac{rx}{1 + r^2 x^2}$;

(4) $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \frac{r^2 x}{1 + r^2 x^2}$;

(5) $F_r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \frac{x}{1 + r^2 x^2}$;

(6) $F_r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \frac{rx}{1 + r^2 x^2}$;

(7) $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \exp(-rx^2)$;

(8) $F_r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \exp(-rx^2)$;

(9) $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{r}\right)$;

(10) $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \sqrt{r^2 + x^2}$;

(11) $F_r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = e^{rx}$;

(12) $F_r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \sin(rx)$;

(13) $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \sin(rx)$;

(14) $F_r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \frac{1}{r} \sin(rx)$;

(15) $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \frac{1}{r} \sin(rx)$;

(16) $F_r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \frac{1}{r}(e^{rx} - 1)$;

(17) $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \frac{1}{r}(e^{rx} - 1)$;

(18) $F_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \arctan\left(x + \frac{1}{r}\right)$;

(19) $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_r(x) = \arctan\left(x + \frac{1}{r}\right)$.

UNA DEFINIZIONE EQUIVALENTE DELLA CONVERGENZA UNIFORME

Teorema 8. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme dato, $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione limitata e $F_r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una famiglia di funzioni limitate che dipende dal parametro $r > 0$. Allora, sono equivalenti:

(i) F_r converge uniformemente a G per $r \rightarrow 0$;

(ii) per ogni successione $r_n \rightarrow 0$ e per ogni successione (non necessariamente convergente) $Y_n \in \Omega$, abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F_{r_n}(Y_n) - G(Y_n)| \rightarrow 0.$$

Osservazione 9. Sia $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data e $X_0 \in \mathbb{R}^d$. Ricordiamo che sono equivalenti

- (i) $\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = F(X_0)$;
- (ii) per ogni successione $X_n \rightarrow X_0$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} |F(X_n) - F(X_0)| \rightarrow 0$.

Proposizione 10. Sia $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Per ogni $X_0 \in \mathbb{R}^d$ consideriamo la famiglia di funzioni

$$F_r(X) := F(X_0 + rX).$$

Dimostrare che sono equivalenti:

- (i) La funzione F è continua in X_0 .
- (ii) Per $r \rightarrow 0$, la famiglia $F_r : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente su B_1 alla funzione costante

$$F_0(X) = F(X_0) \quad \text{per ogni } X \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che (i) \Rightarrow (ii). Siano $r_n \rightarrow 0$ e $Y_n \in B_1$ una successione di punti. Allora, siccome $r_n Y_n \rightarrow 0$, abbiamo

$$|F_{r_n}(Y_n) - F(X_0)| = |F(X_0 + r_n Y_n) - F(X_0)| \rightarrow 0,$$

il che implica (ii).

Dimostriamo ora che (ii) \Rightarrow (i). Sia X_n una successione che tende a X_0 . Allora, abbiamo

$$|F(X_n) - F(X_0)| = \left| F\left(X_0 + r_n \frac{X_n - X_0}{r_n}\right) - F(X_0) \right|$$

Scegliendo $r_n = 2|X_n - X_0|$, abbiamo che

$$r_n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad Y_n := \frac{X_n - X_0}{2r_n} \in B_1.$$

Di conseguenza, per l'uniforme continuità di F ,

$$|F(X_n) - F(X_0)| = |F_{r_n}(Y_n) - F(X_0)| \rightarrow 0. \quad \square$$

CONVERGENZA DEI RISCALAMENTI 1-OMOGENEI

Proposizione 11. Siano $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $X_0 \in \mathbb{R}^d$ un punto e $v \in \mathbb{R}^d$ un vettore. Consideriamo la famiglia di funzioni

$$F_r(X) = \frac{1}{r} \left(F(X_0 + rX) - F(X_0) \right).$$

Dimostrare che sono equivalenti:

- (i) $F(X) = F(X_0) + v \cdot (X - X_0) + o(|X - X_0|)$, ovvero

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{|F(X) - (F(X_0) + v \cdot (X - X_0))|}{|X - X_0|} = 0. \quad (1)$$

- (ii) Per $r \rightarrow 0$, la famiglia $F_r : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente in B_1 alla funzione lineare

$$L(X) = v \cdot X \quad \text{per ogni } X \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che (i) \Rightarrow (ii). Siano $r_n \rightarrow 0$ e $Y_n \in B_1$ una successione (non necessariamente convergente). Allora,

$$|F_{r_n}(Y_n) - v \cdot Y_n| = \left| \frac{1}{r_n} (F(X_0 + r_n Y_n) - F(X_0)) - v \cdot Y_n \right| = |Y_n| \frac{|F(X_0 + r_n Y_n) - F(X_0) - v \cdot (r_n Y_n)|}{|r_n Y_n|}.$$

Siccome, $r_n Y_n \rightarrow 0$ possiamo applicare (i) alla successione $X_0 + r_n Y_n$. Siccome Y_n è limitata, abbiamo

$$|F_{r_n}(Y_n) - v \cdot Y_n| \rightarrow 0,$$

il che conclude la dimostrazione di (i) \Rightarrow (ii).

Dimostriamo ora che (ii) \Rightarrow (i). Sia $X_n \rightarrow X_0$. Definiamo $Y_n = \frac{X_n - X_0}{r_n}$, dove il raggio r_n

$$\begin{aligned} \frac{|F(X_n) - F(X_0) - v \cdot (X_n - X_0)|}{|X_n - X_0|} &= \frac{|F(X_0 + r_n Y_n) - F(X_0) - v \cdot (r_n Y_n)|}{r_n |Y_n|} \\ &= \frac{|F(X_0 + r_n Y_n) - F(X_0) - v \cdot (r_n Y_n)|}{r_n |Y_n|} \\ &= \frac{1}{|Y_n|} |F_{r_n}(Y_n) - v \cdot Y_n|. \end{aligned}$$

Scegliendo

$$r_n = 2|X_n - X_0|,$$

abbiamo che $r_n \rightarrow 0$ e $|Y_n| = 1/2$. Di conseguenza, applicando (ii), otteniamo (1). □